

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

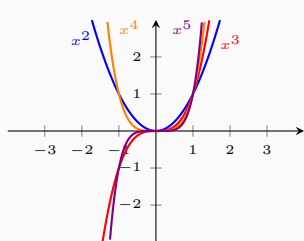
Zahlenmengen:

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (ganzzahlig, positiv und ∞)
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{k \mid k \in \mathbb{N} \vee -k \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist Ergänzung zu } \mathbb{Q} \text{ (Supremumseig.)}\}$
- Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } i^2 = -1\}$

Abbildungen & Funktionen: Jedem Element x aus der Menge A wird genau ein Element y aus der Menge B zugeordnet ($f: A \rightarrow B$)

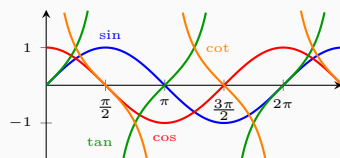
- Injektiv:** Zu jedem $y \in B$ gibt es max. ein Urbild $x \in A$
- Surjektiv:** Zu jedem $y \in B$ gibt es mind. ein $x \in A$ mit $f(x) = y$
- Bijektiv:** Injektiv & surjektiv (Voraussetzung für Inverse!): Inj. $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ | Surj. $\forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y$
- Identität:** Gibt Argument unverändert aus; $\text{id}_A: A \rightarrow A, a \mapsto a$
- Umkehrabbildung/Inverse:** Vertauscht $D_f(A)$ und $W_f(B)$; $f^{-1}: f(A) \rightarrow A, y \mapsto f^{-1}(y), f^{-1}(f(x)) = x$ & $f(f^{-1}(y)) = y$
- Bild:** Menge aller real getroffenen Werte: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
- Urbild:** Menge aller Startwerte, deren Ergebnisse in einer Zielmenge Y landen: $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$
- Beschränktheit:** obere & untere Schranken für y -Werte; Nach oben: $\exists M \in \mathbb{R}: f(x) \leq M$; Nach unten: $\exists m \in \mathbb{R}: f(x) \geq m$
- Infimum und Supremum:** y^* ist Supremum, wenn y^* die größte obere Schranke von f ist und eine Folge (x_n) existiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y^*$; y_* ist Infimum, wenn y_* die größte untere Schranke von f ist und x_n existiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_*$

GRAPHEN DER GRUNDFUNKTIONEN



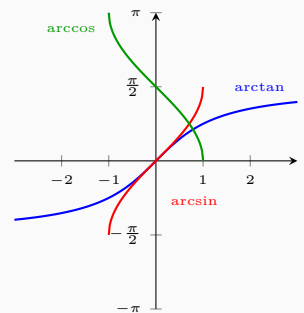
Polynome (2. bis 5. Grad)

$f(x) = x^n$, n gerade = achsensymmetrisch, n ungerade = punktsymmetrisch, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Allgemeine Form: $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$



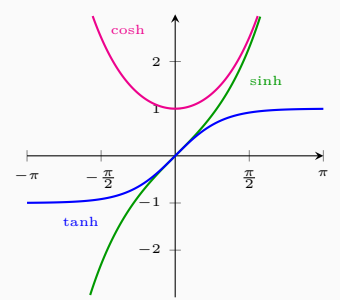
Trigonometrische Funktionen

$\sin, \cos \rightarrow 2\pi$ -periodisch, $W = [-1, 1]$; $\tan, \cot \rightarrow \pi$ -periodisch, Polstellen bei $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (Tangens) und $k\pi$ (Cotangens); Funktionsgleichung: $a \cdot f(b(x-c)) + d$
↑ Streckung: $|a| > 1$ / Stauchung: $|a| < 1$
↔ Spiegelung an x-Achse: $a < 0$
↔ Stauchung: $|b| > 1$ / Streckung: $|b| < 1$
↔ Spiegelung an y-Achse: $b < 0$, Periode: $T/|b|$
↔ Verschiebung: $c > 0$ rechts, $c < 0$ links
↑ Verschiebung: $d > 0$ hoch, $d < 0$ runter



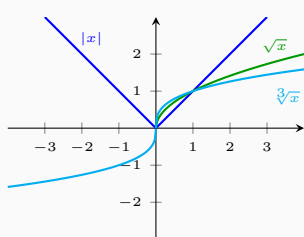
Arkusfunktionen

$\arcsin, \arccos: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\arctan$: Asymptote bei $\pm \frac{\pi}{2}$



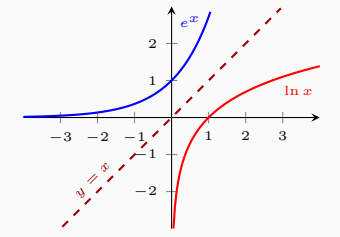
Hyperbelfunktionen

$\sinh(x)$ ungerade, $\cosh(x)$ gerade,
 $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$



Betrags- & Wurzelfunktionen

Betragsfunktion $|x|$ sowie $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x}$



Eulersche Exponential- & Logarithmusfunktionen

Invers zueinander (Spiegelung an $y = x$)

FOLGEN & REIHEN

Vollständige Induktion: „Gilt für alle $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ “

- (IA): Zeigen, dass $A(n_0)$ wahr ist (n_0 = Startwert)
- (IV): Annahme, dass $A(n)$ für beliebiges, festes $n \geq n_0$ wahr ist
- (IB): „Dann gilt auch $A(n+1)$ “ (durch Einsetzen)
- (IS): Beweis von $A(n+1)$ unter Verwendung der IV

- Geometrische Summe:** $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ($q \neq 1$)
- Dreiecksungleichung:** $|x+y| \leq |x| + |y|$
- Indexverschiebung:** $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1+z}^{n+z} a_{k-z}$
- Binomialkoeffizient:** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j}$
- Binomischer Lehrsatz:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Folgen & Konvergenz:

- ε -N-Definition:** Die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
- Monotoner Konvergenzsatz:** Jede reelle Folge, die monoton und beschränkt ist, ist konvergent.

REIHEN- & POTENZREIHENKONVERGENZ

Für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

- Triviales Kriterium:** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \implies \sum a_n$ divergiert
- Majorantenkriterium:** $|a_n| \leq b_n$ & $\sum b_n$ konvergiert $\implies \sum a_n$ absolut konvergent
- Minorantenkriterium:** $a_n \geq b_n \geq 0$ & $\sum b_n$ divergiert $\implies \sum a_n$ divergent
- Quotientenkriterium:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$. Absolut konvergent für $L < 1$; div. für $L > 1$; unbestimmt bei $L = 1$
- Wurzelkriterium:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Absolut konvergent für $L < 1$; divergent für $L > 1$
- Leibniz-Kriterium:** Alternierende Reihe $\sum (-1)^n a_n$ konvergiert, falls $a_n \geq 0$ eine monotone Nullfolge ist

Potenzreihen & Konvergenzradius R : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ oder } R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (|x-x_0| < R)$$

STETIGKEIT & DIFFERENTIALRECHNUNG

Grenzwerte, Stetigkeit, ZWS & Extremwertsatz:

- Stetigkeit:** f ist stetig in $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- Zwischenwertsatz (ZWS):** Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und y ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so existiert mindestens ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.
- Extremwertsatz:** Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ nimmt dort ein globales Maximum und ein globales Minimum an.

Differentialrechnung: f ist differenzierbar in $x_0 \in D$, falls gilt:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Konstantenregel:** $(c)' = 0$ (für $c \in \mathbb{R}$)
- Potenzregel:** $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (für $n \in \mathbb{R}$)
- Faktorregel:** $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ (Konstante bleibt erhalten)
- Summenregel:** $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Produktregel:** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Reziprokenregel:** $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
- Kettenregel:** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Außen · Innen)
- Wurzelregel:** $(\sqrt[n]{g})' = \frac{g'}{n \sqrt[n]{g^{n-1}}}$

Wichtige Ableitungen: $(e^x)' = e^x$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Erweiterte Differentialrechnung:

- Regel von de L'Hospital:** Ist $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ vom Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
- Mittelwertsatz:** f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[\implies \exists c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Satz von Rolle:** Gilt $f(a) = f(b) \implies \exists c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$

KURVENDISKUSSION & TAYLORPOLYNOME

Vollständige Kurvendiskussion:

- Lokale Extrema:** Notwendig: $f'(x_0) = 0$. Hinreichend: $f''(x_0) > 0 \implies$ lokales Min.; $f''(x_0) < 0 \implies$ lokales Max.
- Wendepunkte:** Notw.: $f''(x_0) = 0$ | Hinr.: $f'''(x_0) \neq 0$
- Konvexität (Krümmung):** $f''(x) \geq 0 \implies$ konvex (linksgekrümmt); $f''(x) \leq 0 \implies$ konkav (rechtsgekrümmt)

Taylorpolynom: $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$



INTEGRALRECHNUNG

Integralrechnung:

- **Hauptsatz:** $F' = f \implies \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- **Partielle Integration:**
 $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$
- **Substitutionsregel:** $u = g(x) \implies dx = \frac{du}{g'(x)}$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Stammfunktionen-Tabelle:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x)$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x)$

Partialbruchzerlegung:

1. **Polynomdivision** falls $\deg(\text{Zähler}) \geq \deg(\text{Nenner})$
2. **Nennerfaktorisierung** in Linearfaktoren und quadratische Faktoren, die nicht weiter zerlegbar (= irreduzibel) sind
3. **Ansatz:** $\bullet (z - z_0) \rightarrow \frac{A}{z - z_0} \quad \bullet (z - z_0)^m \rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(z - z_0)^k}$
 $\bullet (z - a)^2 + b^2 \rightarrow \frac{Cz + D}{(z - a)^2 + b^2}$
4. **Koeffizienten bestimmen:**
Koeffizientenvergleich oder Zuhalttemethode

UNEIGENTLICHE INTEGRALE & FOURIER

Uneigentliche Integrale:

- Unbeschränktes Intervall: $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$
- Unbeschränkte Funktion (Polstelle bei b):
 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$

Fourierreihen: Darstellung einer 2π -periodischen Funktion:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

mit den Fourier-Koeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

SPEZIELLE FUNKTIONEN

Allgemeine Exponentialgesetze (e^x):

- (1) $e^0 = 1$
- (2) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- (3) $e^x \neq 0$ und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- (4) $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- (5) $\exp(x) : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$
- (6) $\exp(x)$ ist streng monoton wachsend und bijektiv
- (7) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- (8) $e^{ax} = (e^x)^a$
- (9) $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x > 0$.

Allgemeine Logarithmusgesetze (gilt für $\ln$ UND $\log_a$!):

- (1) $\ln(1) = 0$
- (2) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- (3) $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- (4) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- (5) $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$
- (6) $\ln$ ist streng monoton wachsend
- (7) $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (bijektiv)
- (8) $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- (9) $\ln = \exp^{-1}(x)$

I. $a^x = b \iff x = \log_a(b)$ | II. $\ln(x) = \log_e(x) \implies \ln(e^x) = x$

Trigonometrie:

- **(Co-)Tangens:** $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$
- **Pythagoras:** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- **Vorzeichen nach Quadrant (I, II, III, IV):**
 $\sin: +, +, -, - \mid \cos: +, -, -, + \mid \tan: +, -, +, -$
- **Additionstheoreme:**
 $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
 $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
- **Doppelwinkelformeln:** $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x),$
 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
- **Sinusschwingung:** $f(x) = A \cdot \sin(\omega x - \varphi)$
(A : Amplitude, ω : Frequenz, φ : Phasenverschiebung)

Wertetabelle:

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
Bogenmaß	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0	1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1	0	-1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.	0	n.d.	0

HYPERBELN & KOMPLEXE ZAHLEN

Hyperbelfunktionen:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\textbf{Ableitungen:} \quad \sin' = \cosh, \quad \cos' = -\sinh, \quad \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$
$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad \arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctan' = \frac{1}{1+x^2}$$

Komplexe Zahlen: $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

- **Euler-Formel:** $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
- **Kartesisch $\rightarrow$ Euler:** $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$
(Quadrant beachten, siehe SPEZIELLE FUNKTIONEN!)
- **Euler $\rightarrow$ Kartesisch:** $x = r \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$
- **Konjugation:** $\bar{z} = x - iy, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

LINEARE ALGEBRA

Vektoren & Matrizen (Grundoperationen):

Vektoraddition, Skalarmultiplikation, Matrixmultiplikation

$C = A \cdot B$ für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ durch $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

LGS & Gaußsches Eliminationsverfahren: Zulässige elementare Zeilenoperationen: 1. Zeilen vertauschen, 2. Zeile mit Skalar $\lambda \neq 0$ multiplizieren, 3. Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren, um das LGS in Zeilenstufenform (ZSF) zu überführen

Lösbarkeit ($Ax = b$): Lösbar $\iff \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$

- **Eindeutige Lösung:** $\text{Rang}(A) = n$ (Variablenanzahl) $\iff \det(A) \neq 0$
 - **Unendlich viele Lösungen:** $\text{Rang}(A) < n$ (mit $n - \text{Rang}(A)$ freien Parametern)
 - **Keine Lösung:** $\text{Rang}(A) < \text{Rang}(A|b)$
- Determinanten:** ($A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$): $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$,
 $\det(A^T) = \det(A)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(c \cdot A) = c^n \det(A)$
- **Regel von Sarrus:** Nur für 3×3 Matrizen!
Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen
 - **Laplace-Entwicklung:** Entwicklung nach Zeile i :
 $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ (A_{ij} : Streichungsmatrix)

VEKTORRÄUME & LINEARE ABBILDUNGEN

Vektorräume: Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension:

- **Teilraumkriterium:** $T \neq \emptyset \subseteq V$ ist Teilraum, wenn: 1. $0 \in T$, 2. $v, w \in T \implies v + w \in T$, 3. $\lambda \in \mathbb{K}, v \in T \implies \lambda v \in T$
- **Lineare Unabhängigkeit:** $v_1, \dots, v_k \in V$ linear unabhängig $\iff \sum \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$
- **Basis:** Linear unabhängiges Erzeugendensystem von V
- **Dimension:** $\dim(V) = \text{Anzahl der Basisvektoren}$
 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$; $\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = m \cdot n$; $\dim(\mathbb{R}[z]_{\leq n}) = n + 1$

Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Rang: $f : V \rightarrow W$ linear

$$\iff f(v + w) = f(v) + f(w) \wedge f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

- **Kern:** $\text{Kern}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$
- **Bild:** $\text{Bild}(f) = \{f(x) \mid x \in V\}$
- **Rang(A):** Zeilen-/Spaltenrang = Anzahl Nichtnullzeilen (ZSF)
- **Dimensionssatz (Rangformel):** $\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$

Invertierbarkeit: Quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar

$$\iff \exists B : BA = AB = I_n \iff \det(A) \neq 0 \iff \text{Rang}(A) = n$$

ORTHOGONALITÄT & SPEKTRALTHEORIE

Skalarprodukt, Norm, Orthogonalität, Cauchy-Schwarz:

- $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- **Orthogonalität:** $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$
 - **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:** $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Gram-Schmidt-Verfahren: Berechnung einer Orthonormalbasis ($e_1, \dots, e_k$) aus linear unabhängigen Vektoren ($v_1, \dots, v_k$):

1. $u_1 = v_1 \implies e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
2. $u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 \implies e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$
3. $u_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 \implies e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$

Eigenwerte & Eigenvektoren, Charakteristisches Polynom:

$Av = \lambda v$ mit Vektor $v \neq 0$

- **Charakteristisches Polynom:** $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$
- **Eigenraum:** $E_\lambda = \text{Kern}(A - \lambda I_n)$

Spektraltheorie & Diagonalisierbarkeit: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar $\iff$ Für alle Eigenwerte gilt: algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit ($\dim(E_\lambda)$)